$-2x+y=5$ $\quad$ $6x+\cancel{3y}=9$

$-4+y=5$ $\quad$ $6x-\cancel{3y}=+15$

$y=9$ $\quad$ $12x=24$

$x=2$

D S T Q ~~X~~ S S Turma F1 15 • 08 • 19

defreitas-renata.github.io/homepage
freitas@vm.uff.br

24/9 - V1
15/10 - Profs e Profas
19/11 - V2
21/11 - Recesso Arariboia
28/11 - 2ª Chamada
5/12 - V5

Livro-Texto

Anton e Rorres
(Colombo e Koiller)

—//—

Resolução de Sistemas de Equações Lineares

Exemplos

① $S=\{(2,1)\}$

① $\begin{cases} x-3y=-1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ $\rightarrow y=5-2x$ $\quad$ $y=1$

$x-3(5-2x)=-1$

$x-15+6x=-1$

$7x=14 \rightarrow x=2$

② $\begin{cases} 6x+3y=9 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 6x+3y=15 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

$y = \frac{9 - 6x}{3}$

$y = \frac{5 - 2x}{}$

$5 - 2x$

D S T Q Q S S

Uma equação linear nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma equação que pode ser escrita na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, onde $a_1, a_2, \dots, a_n$ (coeficientes) e b (termo independente) são números

Um sistema de equações lineares nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ é um conjunto finito de equações lineares nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$

Resolver uma equação linear nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ é encontrar todos os valores para as variáveis que tornam a equação verdadeira, isto é, encontrar todas as n-plas $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ de números tais que:

$a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n = b$

Resolver um sistema de equações lineares é encontrar todas as soluções comuns a todas as equações do sistema

Notação Matricial

$$\begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

N

$$\begin{cases} -2x + 6y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

A

$$\begin{cases} -2x + 6y = 2 \\ 0 \cdot x + 7y = 7 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x+6y=2 \\ y=1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x+6.1=2 \\ y=1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad S=\{(2,1)\}$$

$$\sim$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

—//—

Conjunto de Exercícios 1.1

1) ~~a) $x_1+5x_2+\sqrt{2}x_3=1$~~

Não são equações lineares

b, d, e

São equações lineares

a, c, f

2) Todas

3) a) $7x-5y=3$

$7.2-5.1=11$ $\qquad S=\{(4,5)\}$

$7.4-5.5=3$

$28-25=3$

$3=3$

b) $3x_1-5x_2+4x_3=7$

~~$x_1-x_2+x_3=0$~~

~~$x_1+x_2-x_3=0$~~

$x_3=1$

$3x_1-5x_2=3$

$6x + 3y = 9$
$-6x - 3y = 15$

$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 \\ -6 & -3 & 15 \end{bmatrix}$

$-2x - 6y = +2$
$+6x$

$0 \cdot x + 0 \cdot y = 24$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$

20 08 19

D S T Q Q S S

Sistemas da outra aula

② $\begin{cases} 6x + 3y = 9 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 6x + 3y = 15 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

Escalonamento de matrizes

Duas matrizes são equivalentes quando os sistemas de equações lineares associados a cada uma delas têm o mesmo conjunto de soluções

Operações elementares

(M) Multiplicar cada elemento de uma linha da matriz por um valor não-nulo

(A) Somar os elementos correspondentes de duas linhas da matriz, colocando as somas em uma das linhas e mantendo a outra

(T) → Trocar duas linhas de posição

Algoritmo de Escalonamento

$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

(A*) Somar os elementos de uma linha com múl-

D S T Q Q S S

tiplos dos elementos de outra linha, guardando o resultado na linha que não foi multiplicada e mantendo a outra.

$L_i \to cL_i \ (c \neq 0)$
$L_i \to L_i + L_j$
$L_i \Leftrightarrow L_{ij}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$(-2)L_2 + L_1 \to L_2 \qquad L_2 \to \left(\frac{1}{7}\right)L_2 \qquad L_1 \to L_1 + 3L_2$

Ex 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$L_2 \to L_2 \cdot (-2) + L_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 13 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$-2+4+2 \qquad 3+6+3=0$

$L_3 \to L_2 \cdot (-3) + L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 13 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 13 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$3 - \frac{3}{2}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -2 & -1 & -1/2 \\ 3 & 7 & 5 & 3/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -2 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 7 & 7/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$L_1 \to \left(\frac{1}{2}\right)L_1$

$L_2 \to L_2 + (-1)L_1$

$L_3 \to L_3 + (-3)L_1$

$-7 \quad -21/4 \quad -3/4$

$L_2 \to \left(\frac{-1}{2}\right)L_2$ depois de fazer isso

$L_3 \to L_3 + (-7)L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & -7/4 & -1/4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6/14 \\ 0 & 1 & 0 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 \end{bmatrix}$$

$L_3 \to \left(\frac{-4}{7}\right)L_3$

- $L_1 \to L_1 + \left(\frac{-1}{2}\right)L_3$
- $L_2 \to L_2 + \left(\frac{-3}{4}\right)L_3$

$x = 3/7$
$y = 1/7$
$z = 1/7$

$S = \{(3/7, 1/7, 1/7)\}$

$$\begin{cases} 2x + z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \\ 3x - 7y + 5z = 3 \end{cases}$$

$2x - y + 3z = 6$

$-y = 6 - 2x - 3z$

$y = 2x + 3z - 6$

$\forall x \in \mathbb{R}, y = 2x - 4$

$\forall x, z \in \mathbb{R}, y = 2x + 3z - 6$

$\{\forall y \in \mathbb{R}, x = 3\}$

$y = 2x - 4$

S S S S

22 · 08 · 19 D S T Q Q S S

Exercício Resolva as equações lineares:

① na variável x:

(a) $2x = 6 \rightarrow x = 3 \quad S = \{3\}$

(b) $0x = 0 \rightarrow S = \mathbb{R}$

(c) $0x = 3 \rightarrow S = \emptyset$

② nas variáveis x e y:

$\rightarrow S = \{a, 2a - 4 : a \in \mathbb{R}\}$

(a) $2x - y = 4 \rightarrow S = \{(4,4), (0,-4), (3,2), (1,-2), \ldots\}$

(b) $5x = 15 \; S \; (5x + 0y = 15) \rightarrow S = \{(3,a) : a \in \mathbb{R}\}$

(c) $y = 2 \quad S = \{(a,2) : a \in \mathbb{R}\}$

(d) $0 = 0 \quad S = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

(e) $0 = 3 \quad S = \emptyset$

③ nas variáveis x, y e z:

(a) $2x - y + 3z = 6 \quad S = \{(a, 2a + 3b - 6, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Verifique se $(1, 2, -1)$ é uma solução dos sistemas de equações lineares nas variáveis x, y e z:

① $\begin{cases} 5x - y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ Sim

② $\begin{cases} 4x - y + 3z = -3 \\ 3x + y + 9z = -4 \end{cases}$ Sim

③ $\begin{cases} 4x - y + 3z = -1 \\ 3x + y + 9z = -4 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ Não

D S T Q Q S S

Escalonamento de matrizes

A matriz ampliada de um sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_n + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Dizemos que uma matriz está na forma escalonada quando:

(1) O 1º elemento não nulo de cada linha está à direita do 1º elemento não nulo de todas as linhas acima,

(2) as linhas nulas estão todas abaixo das linhas não-nulas

Dizemos que uma matriz está na forma escalonada reduzida quando esta na forma escalonada e

(3) o 1º elemento não nulo de cada linha é 1,

(4) nas colunas contendo o 1º elemento não nulo

$\{\forall z \in \mathbb{R}, x = 8z + 4, y = 3z - 1\}$

D S T Q Q S S

de alguma linha, todos os outros elementos são nulos

Operações Elementares

(M) $h_i \to c\,h_i \ (c \neq 0)$

(A) $h_i \to h_i + h_j$

(T) $h_i \leftrightarrow h_j$

(MA) $h_i \to h_i + c\,h_j$

Algoritmo de escalonamento

Exemplo: resolva o sistema por escalonamento

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y - z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$L_2 \to L_2 + (-2)L_1$ $\quad L_2 \to (-1)L_2$ $\quad L_1 \to L_1 + (-3)L_2$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x - 8z = 4 \therefore x = 8z + 4 \\ y + 3z = -1 \therefore y = 3z - 1 \end{cases}$$

$$S = \{(8a + 4, -3a - 1, a) : a \in \mathbb{R}\}$$

Voltando para os exemplos da primeira aula

27 · 08 · 19 ..... D S T Q Q S S

Operações Elementares

(M) $L_i \to cL_i \ (c \neq 0)$
(A) $L_i \to L_i + L_j$
(T) $L_i \leftrightarrow L_j$

(MA) $L_i \to L_i + cL_j$

Dadas duas matrizes M e N, se N foi obtida de M pela aplicação de uma operação elementar, então os sistemas associados a M e a N têm o mesmo conjunto de soluções
Ou seja: as operações elementares "preservam" o conjunto de soluções dos sistemas associados às matrizes
—— de fato: ——

Seja $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{bmatrix}$

O sistema associado a M é:

$$(1) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Se $M \sim N$, então:
$L_i \to cL_i$

$N = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & cb_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{bmatrix}$ ou $N = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ ca_{21} & ca_{22} & cb_2 \end{bmatrix}$
$(i = 1)$ $(i = 2)$

D S T Q Q S S

e o sistema associado a N é:

2) $\begin{cases} ca_{11}x_1 + ca_{12}x_2 = cb_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ ca_{21}x_1 + ca_{22} = cb_2 \end{cases}$

$(i=1)$ $(i=2)$

Sejam S_1 e S_2 os conjuntos de soluções dos sistemas (1) e (2), respectivamente

Seja $(s,r) \in S_1$. Daí:

$a_{11}s + a_{12}r = b_1$ e
$a_{21}s + a_{22}r = b_2$

Daí:

$c(a_{11}s + a_{12}r) = cb_1$
$ca_{11}s + ca_{12}r = cb_1$

Assim, quando $i=1$, temos que $(s,r) \in S_2$

Também temos que

$c(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) > cb_2$ e $ca_{21}x_1 + ca_{22}x_2 = cb_2$

Logo quando $i=2$, temos que $(s,r) \in S_2$ Assim: $S_1 \subseteq S_2$

Agora vejamos se $S_2 \subseteq S_1$

Seja $(s,r) \in S_2$, Quando $i=1$, temos que:

$ca_1s + ca_{12}r = cb_1$ e
$a_{21}s + a_{22}r = b_2$

Como $c \neq 0$:

$$\frac{1}{c}(ca_{11}s + ca_{12}r) = \frac{1}{c}cb_1$$

Daí: $a_{11}s + a_{12}r = b_1$. Daí, $(s, r) \in S_1$

Genericamente:

Se $M \sim N$, então a equação na ($h_i \to ch_i$) posição i no sistema associado a N é: $ca_{i1}x_1 + ca_{i2}x_2 + \dots + ca_{in}x_n = b_i$ onde $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ é a equação na posição i no sistema associado a M.

Sejam S_M e S_N os conjuntos de soluções dos sistemas associados às matrizes M e N, respectivamente.

Seja $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in S_M$. Daí: $a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \dots + a_{in}s_n = b_i$

Daí:

$$c(a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \dots + a_{in}s_n) = cb_i$$

$$ca_{i1}s_1 + ca_{i2}s_2 + \dots + ca_{in}s_n = cb_i$$

Como nenhuma outra equação mudou, $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in S_N$

Assim: $S_1 \subseteq S_2$

Agora vejamos se $S_2 \subseteq S_1$. Seja $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in S_2$

K K K K K K

D S T Q Q S S

(A

Seja M uma matriz qualquer, se $M \sim N$, então a equação na $(L_i \to L_i + L_j)$ posição i no sistema associado a N é: $(a_{j1} + a_{i1})x_1 + (a_{j2} + a_{i2})x_2 + \ldots + (a_{jn} + a_{in})x_n = b_i + b_j$ onde $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ e $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j$ são as equações nas posições i e j no sistema associado a M.

Sejam S_M e S_N os conjuntos de soluções dos sistemas associados as matrizes M e N, respectivamente

Seja...

Boldrini et al / p 90

(6) $\begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & K \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3/4 & -1/2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & K \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3/4 & -1/2 \\ 0 & -1/4 & 5/2 \\ 0 & 1/2 & K+1 \end{bmatrix} \sim$

$L_1 \to -\frac{1}{4} L_1$ $\quad L_2 \to L_2 + (-5)L_1$ $\quad L_3 \to L_3 + (-2)L_1$ $\quad L_2 \to (-4)L_2$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3/4 & -1/2 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 1/2 & K+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & K+6 \end{bmatrix}$

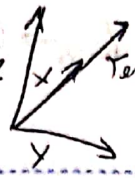
$L_1 \to L_1 + \frac{3}{4} L_2$ $\quad L_3 \to L_3 + (-\frac{1}{2})L_2$

$\begin{cases} x = -8 \\ y = -10 \\ 0 = K+6 \quad K = -6 // \end{cases}$

O sistema só tem solução se $K+6 = 0 // \therefore K = -6 //$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}$

$x - 2z = 0$
$y + 3z = 0$



$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\frac{1}{0}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

1 1 1 0 1 0 -2 0
0 1 3 0 0 1 3 0

D S T Q X S S ..... Trivial ..... 29 • 08 • 19

Sistemas Homogêneos

Um sistema de equações lineares é homogêneo quando os termos independentes de todas as equações do sistema são nulos.

Se S é o conjunto de soluções de um sistema homogêneo nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, então $(0, 0, \ldots, 0) \in S$ (n-pla nula)

Solução trivial

Logo, $S \neq \emptyset$. Sistemas homogêneos são sempre possíveis (determinados ou indeterminados)

Além disso, se $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S$, e $c \in \mathbb{R}$, então $(cs_1, cs_2, \ldots, cs_n) \in S$

Mais ainda: se $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S$, e $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in S$, então $(s_1 + r_1, s_2 + r_2, \ldots, s_n + r_n) \in S$

Exemplo

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x + y - z - w = 0 \end{cases}$$

$S = \{(2a + 2b, -3(a+b), a, b) / a, b \in \mathbb{R}\}$

$(0, 0, 0, 0) \in S$

$(4, -6, 1, 1) \in S$

$(2, -3, 1, 0) \in S$

$(6, -9, 2, 0) \in S$

$L_3 \to L_3 + (-m+8)L_2$

$z = \frac{2m-10}{3}$

D S T Q Q S S

$(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S_1$

$S_1 = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n) + (r_1, r_2, \ldots, r_n) / (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in S_2\}$

① ——— = *
——— = □
——— = *
——— = *

② ——— = 0
——— = 0
——— = 0
——— = 0

Exercício

Encontre os valores de m para os quais o sistema

$$\begin{cases} -x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \\ 4x + my - 10z = 0 \end{cases}$$

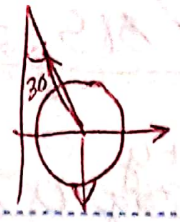
(a) é impossível (Nenhum)
(b) é possível determinado
(c) é possível indeterminado

(b) → $m \neq 8$ (c) → $m = 8$

b) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & m & -10 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2^{-2} & 1^{-4} & -4^{+6} & 0^{0} \\ 4^{-4} & m^{-8} & -10^{+12} & 0^{0} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & m-8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1^{0} & 2^{-2} & -3^{-4/3} & 0^{0} \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & m-8 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -13/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & m-8 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -13/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

54 | 3
24 18
0



D S X Q Q S S ..... 03 • 09 • 19

Subespaços Vetoriais

- Os números reais são chamados de vetores de $\mathbb{R}$.
- Os pares de números reais são chamados de vetores de $\mathbb{R}^2$
- Os terno de números reais são chamados de vetores de $\mathbb{R}^3$.
- As quádruplas de números reais são chamadas de vetores de $\mathbb{R}^4$
- As n-plas de números reais são chamadas de vetores de $\mathbb{R}^n$.

Se S é o conjunto de soluções de um sistema homogêneo em n variáveis, então S é um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^n$ tal que:

(1) O vetor nulo de $\mathbb{R}^n$ pertence a S $(0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n$

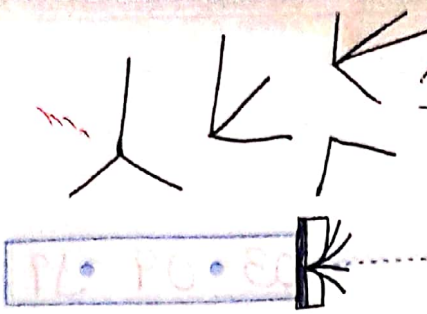
(2) Se $v \in S$ e $a \in \mathbb{R}$, então $a \cdot v \in S$;

(3) Se $u \in S$ e $v \in S$, então $u + v \in S$.

$u = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S$, $v = (r_1, r_2, \dots, r_n)$

$u + v = (s_1 + r_1, s_2 + r_2, \dots, s_n + r_n) \in S$

Se S é um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^n$ tal que (1), (2) e (3), então S é o conjunto de soluções de um sistema homogêneo.



$\frac{15-6x}{3} \quad \frac{3(5-2x)}{3}$

$x+y=0 \quad x=-y$

$2x+4y=0 \quad -2y+4y=0$

Conjunto de soluções de sistemas homogêneos em n variáveis são chamados de subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$.

Exercício - Encontre um sistema homogêneo cujo conjunto de soluções seja S:

(1) $S=\{(0,0)\}$

$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+4y=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

(2) $S=\{(-3,2),(0,0),(-6,4)\}$

$S=\{a.(-3,2) : a \in \mathbb{R}\}$

$\begin{cases} 7x+2y=11 \\ 3x+y=-7 \end{cases}$

$3x+y=-7$

$-9+y=-7$

$y=2$

$x=-3$

$a.(-3,2)+b(-3,2)=(a+b).(-3,2)$

$\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} -3a+2b=0 \\ -6a+4b=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x+\frac{3}{2}y=0 \\ 0=0 \end{cases}$

$S=\{(\frac{-3}{2}a, a) : a \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$

D S T Q Q S S

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 7 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 9 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & -5 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 & -7 \\ 0 & 6 & 15 & 0 & -3 \\ 0 & 10 & 25 & -1 & -9 \\ 0 & -6 & -15 & 4 & 19 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 5/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 10 & 25 & -1 & -9 \\ 0 & -6 & -15 & 4 & 19 \end{bmatrix}$$

$L_2 \to L_2 + L_1$, $L_3 \to L_3 + 2L_1$, $L_4 \to L_4 - 3L_1$

$L_2 \to \frac{1}{6} L_2$

$L_1 \to L_1 + (-4)L_2$, $L_3 \to L_3 + (-10)L_2$, $L_4 \to L_4 + 6L_2$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 5/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 5/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 5/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} //$$

$L_4 \to L_4 + 3L_3$

$L_4 \to L_4 + (-4)L_3$

Para admitir nenhuma solução $3 - 2h = 0$ e $k - 2 \neq 2$

$h = 3/2$ $\quad k \neq 2$

$\Rightarrow k \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} x + \frac{3y}{2} = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Para admitir múltiplas soluções $3 - 2h = 0$ e $k - 2 = 0$

$h = 3/2$ $\quad k = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} x + \frac{3y}{2} = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Para admitir uma única solução $3 - 2h = \mathbb{R}$ e $k - 2 = 0$

$h \neq 3/2$ $\quad k = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\sim // \sim$

3,45 5/2 2/3 0,6666

10 • Setembro • 19 — D S T Q Q S S

Subespaços Vetoriais

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ é o conjunto de soluções de um sistema homogêneo se, e somente se:

(1) $S \neq \emptyset$

(2) S é fechado sob multiplicação por escalar,

(3) S é fechado sob adição de vetores

Dizemos que $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ quando (1), (2) e (3)

Exemplos:

(1) $W = \{(0,0,0,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^5$

(2) Retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$

$U = \{(x, 5x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$W = \{(3z, 11z, z) : z \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(3) Planos que passam pela origem em $\mathbb{R}^3$:

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 11y + 5z = 0\}$

(4) $W = \{(a, a+b, 2a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

CONTRA EXEMPLOS

(1) Alguns conjuntos de vetores não são subespaços vetoriais. Por exemplo:

$(2,2,2,-6,0)$ $a=1$ $b=2$

$\begin{bmatrix} 2 & a \\ 3^{-3}b & -\frac{3a}{2} \\ 3^{-3}c & -\frac{3a}{2} \\ 2^{-2}d & -a \end{bmatrix}$

D S T Q Q S S

$a=2$ $(2,3,3,2)$
$b=3$

$(1,2,3,4)$

$(3,5,6,6)$

$\begin{bmatrix} 1 & a/2 \\ 0\,b & -\frac{3a}{2} \\ 0\,c & -\frac{3a}{2} \\ 0\,d & -a \end{bmatrix}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$

(2) $B = \{(2a, a+1, b, -3b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^5$

$(3,2,4,5,6) \notin B$

$(14,8,3,-9,0) \in B \quad B \neq \emptyset$

$(2,2,1,-3,0) + (14,8,3,-9,0) =$

$\in B$

$(16,10,4,-12,0) \notin B$

$16 \neq \frac{16}{2} + 1$

$b = \frac{3a}{2} = 0$

$b = \frac{3a}{2}$

não é subespaço vetorial

$c = \frac{3a}{2}$

$(a, \frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}, a) \quad a \in \mathbb{R}$

$a = a$

Exercício - Encontre um sistema homogêneo que tenha o seguinte conjunto de soluções:

(1) $W = \{(0,0,\ldots,0)\} \subseteq \mathbb{R}^n$

Resposta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_m = 0 \end{cases}$

(1,9) (a) $W \subseteq \mathbb{R}^3$

$v = (4,0,1) \in W$

$W = \{a \cdot (4,0,1) : a \in \mathbb{R}\} \Rightarrow W = \{(4a, 0, a) : a \in \mathbb{R}\}$

W é o conjunto de múltiplos do vetor v

$\begin{cases} x = 4z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 4z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

(1,6) $W = \{a.(4,-3,1) : a \in \mathbb{R}\}$
$(4a, -3a, a)$

Resp: $\begin{cases} x - 4z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$

(1,7) $r, s \in \mathbb{R}$

$W = \{a.(r,s,1) : a \in \mathbb{R}\}$
(ra, sa, a)

Resp: $\begin{cases} x - rz = 0 \\ y - sz = 0 \end{cases}$

(1,8) $W = \{a.(r,1,s) : a \in \mathbb{R}\}$ $r, s \in \mathbb{R}$

Resp: $\begin{cases} x - ry = 0 \\ z - sy = 0 \end{cases}$

(2) $W = \{a.(4,0,-2) : a \in \mathbb{R}\}$
$= \{a.(-2,0,1) : a \in \mathbb{R}\}$
$2a, 0, a$

Resp: $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

(3) $W = \{a.(r_1, r_2, \ldots, r_n) : a \in \mathbb{R}\}$ → Estar
com $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$
e $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \neq (0,0,\ldots,0)$ com $r_i \neq 0$

Resp:

$W = \left\{a.\frac{1}{r_i}(r_1, r_2, \ldots, r_n) : a \in \mathbb{R}\right\}$

$\begin{cases} x_1 - r_1 x_i = 0 \\ x_2 - r_2 x_i = 0 \\ \vdots \\ x_{i-1} - r_{i-1} x_i = 0 \\ x_{i+1} - r_{i+1} x_i = 0 \\ x_n - r_n x_i = 0 \end{cases}$ ...

1984

D S T Q Q S S

Tomando como base o item ③, elabore outros exemplos, variando o valor de n e de $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

(a) $n=4$ | i |

$r_1 = \sqrt{2}$ 1

$r_2 = 0$.

$r_3 = -3$ 3

$r_4 = 0$.

$W = \{a \cdot (\sqrt{2}, 0, -3, 0) : a \in \mathbb{R}\}$

$= \left\{a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2}, 0, -3, 0) : a \in \mathbb{R}\right.$

$= \left\{a \left(1, 0, \frac{-3}{\sqrt{2}}, 0\right) a \in \mathbb{R}\right\}$

$= \left\{\left(a, 0, \frac{-3a}{\sqrt{2}}, 0\right) : a \in \mathbb{R}\right.$

$$\begin{cases} x_2 - 0 x_1 = 0 \\ x_3 - \left(\frac{-3}{\sqrt{2}}\right) x_1 = 0 \\ x_4 - 0 x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 + \frac{3}{\sqrt{2}} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} //$$

12/09/19

Combinações lineares

Revisão: Problema

Dado S, um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^n$, que é não vazio e fechado sob multiplicação por escalar e sob adição de vetores, encontrar um sistema homogêneo que tem S como conjunto de soluções.

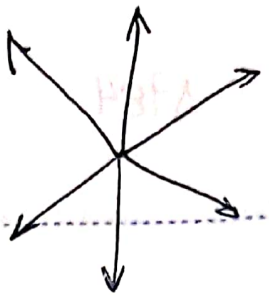
$S = \{a(1,1,2,0) + b(0,1,0,1) : a, b \in \mathbb{R}\}$

$(1,1,2,0) \in S$

$(0,1,0,1) \in S$ $\quad S = \{a(1,1,2,0) + b(2,2,4,0) \cdot a, b \in \mathbb{R}\}$

$2(1,1,2,0)$

$(a+2b)(1,1,2,0)$



D S T Q Q S S

Dizemos que um vetor v é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$ quando existem $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k$$

Dizemos também que o conjunto formado por todas as combinações lineares dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ é o subespaço vetorial gerado por $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

NOTAÇÃO:

$$\text{Span}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} =$$

$$\text{Ger}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = [v_1, v_2, \ldots, v_k] =$$

$$\{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots a_k v_k : a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}$$

é o (sub-)espaço gerado por $v_1, v_2, \ldots, v_k$

Exemplo:

$$S = \{a(1,1,2,0) + b(0,1,0,1) : a, b \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \text{Span}\{(1,1,2,0), (0,1,0,1)\}$$

Exercício

$x = a$ $\quad a = c$

$2x = c$ $\quad x = \frac{c}{2}$ $\quad \frac{1}{2} \; 2 = \frac{c}{a}$

D S T Q Q S S

Verifique se $v \in S$

(a) $v = (1,2,3)$ Não

(b) $v = (4,4,8,0)$ Sim: $(4,4,8,0) = 4(1,1,2,0) + 0.(0,1,0,1)$

(c) $v = (0,-2,0,-2)$ Sim: $0(1,1,2,0) + (-2)(0,1,0,1)$

(d) $v = (1,2,2,1)$ Sim: $1 \cdot (1,1,2,0) + 1(0,1,0,1)$

(e) $v = (1,2,3,4)$ ~~Acho~~ que não... NÃO!

(f) $v = (x,y,z,w)$

$(1,2,3,4) = x(1,1,2,0) + x(0,1,0,1)$

$(1,2,3,4) = (x,x,2x,0) + (0,y,0,y)$

$(1,2,3,4) = (x, x+y, 2x, y)$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x + y = 2 \\ 2x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$ Impossível

(f) $v = (a,b,c,d) = x \cdot (1,1,2,0) + y(0,1,0,1)$

$$\begin{cases} x = a \\ x + y = b \\ 2x = c \\ y = d \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 2 & 0 & c \\ 0 & 1 & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & d \\ 2 & 0 & c \\ 1 & 1 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & -2a+c \\ 1 & 1 & b \end{bmatrix} \sim$$

$L_2 \leftrightarrow L_4$ $\quad L_3 \to L_3 + (-2)L_1$ $\quad L_4 \to L_4 + (-1)L_1$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & -2a+c \\ 0 & 1 & -a+b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & -2a+c \\ 0 & 0 & -a+b-d \end{bmatrix}$$

$L_4 \to L_4 + (-1)L_2$

$\text{Span}\{(1,1,2,0),(0,1,0,1)\} = \{(a,b,c,d) : -2a+c=0 \text{ e } -a+b-d=0\}$

$$\begin{cases} -2x + z = 0 \\ -x + y - w = 0 \end{cases}$$

D S T Q Q S S

Revisãozinha → Espaços Vetoriais

1. Se $u, v \in S$, então $u+v \in S$
2. $u+v = v+u$
3. $u+(v+w) = (u+v)+w$
4. $u+(-u) = (-u)+u = 0$
5. $0+u = u+0 = u \rightarrow \exists\, 0 \in V$, vetor nulo
6. $a \in \mathbb{R}$, $u \in S$, $au \in S$
7. $a(u+v) = au + av$
8. $(a+b)u = au + bu$
9. $a(bu) = (ab)u$
10. $1u = u$

Exercícios Lista 3

2-

(a) $S = \{(0,0)\}$ é não-vazio e fechado para adição e multiplicação

1 → $0+0=0 \in S$ ✓

6 → $a0 = 0 \in S$ ✓

$a(0,0) = 0,0 \in S$ ✓

(b) $S = \{a(1,2) / a \in \mathbb{R}\}$ Sim

$a = 3$ $\quad u = (1,2)$ e $v = (3,6)$

1 → $(1,2)+(3,6) = (4,8)$ ✓

6 → $a(1,2) \in S$ ✓

(c) $S = \{(-a,a) / a \in \mathbb{R}\}$ Fechado para Adição ✓ Multiplicação ✓

$a = 2$

$b = 3$

$b(-2,2) \quad (-2,2)+(-6,6)$

$a(-1,1) \quad (-8,8)$ ✓

$b \in \mathbb{R} \quad b(-a,a) = (-ba, ba) \in S$ //

D S T Q Q S S

Ex 3 $n=4$ $\quad W=\{a\,\frac{1}{3}\,(3,7,9,5) : a\in\mathbb{R}\}$

$r_1=3 \quad 1$

$r_2=7 \quad 7/3 \quad W=\{a(1,\frac{7}{3},3,\frac{5}{3}) : a\in\mathbb{R}\}$

$r_3=9 \quad 3 \quad W=\{(a,\frac{7a}{3},3a,\frac{5}{3}a) : a\in\mathbb{R}\}$

$r_4=5 \quad 5/3$

$$\begin{cases} x_2-\frac{7}{3}x_1=0 \\ x_3-3x_1=0 \\ x_4-\frac{5}{3}x_1=0 \end{cases}$$

Dependência e Independência Linear

Exemplo: Encontre o subespaço gerado pelo conjunto de vetores

$$A=\{(1,1,2,0),(-3,-3,6,0),(0,1,0,1),(1,2,2,1)\}\subseteq \mathbb{R}^4$$

Resolução:

Span A = ?

$$\text{Span } A=\{a.(1,1,2,0)+b.(-3,-3,-6,0)+c.(0,1,0,1)+ d.(1,2,2,1) : a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$$

$(a,b,c,d) \in \text{Span } A$?

Peraí que vou pensar:

(1,5,2,4)

D S T Q Q S S

(a,b,c,d)

$(\quad) = x(1,1,2,0) + y(-3,-3,-6,0) + z(0,1,0,1) + w(1,2,2,1)$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 & a \\ 1 & -3 & 1 & 2 & b \\ 2 & -6 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & d \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a-c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & d \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -3 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2a+c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d-b+a \end{array}\right]$$

matriz de coeficientes

forma escalonada (reduzida) da matriz de coeficientes

$\sim$

$$\begin{cases} x-3y+w=a \\ z+w=-a+b \end{cases}$$

$(a,b,c,d) \in \text{Span } A$ se, e só se, $-2a+c=0$ e $a-b+d=0$

$\text{Span } A = \{(a,b,c,d) : c=2a \text{ e } b=a+d\}$

$(1,2,3,4) \in \text{Span } A$? Não

$(1,2,4,4) \in \text{Span } A$? Não

$(1,1,2,0) \in \text{Span } A$? Sim

$(0,0,0,0) \in \text{Span } A$? Sim

Quando $(a,b,c,d) \in \text{Span } A$:

$(a,b,c,d) = a(1,1,2,0) + (-a+b)(0,1,0,1)$

$\text{Span } A = \{(a, a+d, 2a, d) : a,d \in \mathbb{R}\}$

$(1,2,3,4) \notin \text{Span } A$

$(1,2,2,4) \notin \text{Span } A$

$(0,1,0,1) \in \text{Span } A$

$(1,2,2,1) \in \text{Span } A$

$1(1,1,2,0) + 2(-3,-3,-6,0) + 4(0,1,0,1) + 5(1,2,2,1) =$

$(0,9,0,9) \in \text{Span } A$? Sim

$\text{Span}\{(1,1,2,0),(0,1,0,1)\}$

$$\begin{cases} x = a - 3y + w \\ z = -a + b + w \end{cases}$$

$(-3,-3,-6,4) = (-3)(1,1,2,0) + 4(0,1,0,1)$

$(0,9,0,9) = x(1,1,2,0) + y(-3,-3,-6,0) + z(0,1,0,1) + w(1,2,2,1)$

$x = a$

$z = -a + b$

$(0,9,0,9) = 9(0,1,0,1)$

$\text{Span } A = \text{Span}\{(1,1,2,0),(0,1,0,1)\}$

D S T Q Q S S

Def: Dado um conjunto A de vetores $\mathbb{R}^n$, dizemos que A é linearmente dependente quando existe ao menos um vetor em A que pode ser escrito como combinação linear dos outros. Caso contrário, dizemos que A é linearmente independentes

Exercício - Verifique se os conjuntos de vetores são LI ou LD

① $A=\{(0,1,-1),(1,2,3)\}$

② $\{(1,2),(-1,0),(0,7)\}=B$

① $A=\{x(0,1,-1)+y(1,2,3)\}$

$(a,b,c)\in A?$

$$\sim\begin{bmatrix}0&1&a\\1&2&b\\-1&3&c\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&b\\0&1&a\\-1&3&c\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&b\\0&1&a\\0&5&b+c\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&b-2a\\0&1&a\\0&0&b+c-5a\end{bmatrix}\begin{cases}x=b-2a\\y=a\end{cases}$$

$b-2a=a$

$2a=b$

$a2=\underline{b}$

LI //

$$\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\-1&3&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&5&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$(a,b,c)\in A\Leftrightarrow a=\dfrac{b+c}{5}$

$(7,8,9)\in A?\quad 7=\dfrac{8+9}{5}=\frac{17}{5}\notin$ Não

$(2,4,9)\in A?\quad 2=\dfrac{4+9}{5}=\frac{13}{5}\notin$ Não

$(2,4,6)\in A?\quad 2=\dfrac{4+6}{5}=2\in$ Sim

$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 & 0 \\ 6 & 12 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} 1\ 4\ 2\ 0 \\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ 0\ -3\ -3\ 0 \end{matrix}$

S25
S12

D S T Q Q S S

Dizemos que A é a base de um subespaço vetorial S quando Span A = S e A = L.I

—— // ——

Verifique se são L.D ou L.I: $(2,4,6) = 2(4,2,0)$

$A = \{(2,4,6), (8,10,12), (4,2,0)\}$

$(0,0,0) = x(2,4,6) + y(8,10,12) + z(4,2,0)$

resolução

$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & 2 & 0 \\ 6 & 12 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ N...N $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ N $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Linha nula, logo são linearmente dependentes

$\therefore x = 2z$

$\therefore y = -z$

$z = 1$
$x = 2$
$y = -1$

outra resolução

$(8,10,12) = 2 \cdot (2,4,6) + 1(4,2,0)$

$(0,0,0) = 2 \cdot (2,4,6) + (-1)(8,10,12) + 1(4,2,0)$ ∴

$(4,2,0) = (-2)(2,4,6) + 1 \cdot (8,10,12)$

Se existem $x, y, z \in \mathbb{R}$, então $(a,b,c) \in$ ger A

$(a,b,c) = x \cdot (2,4,6) + y(2 \cdot (2,4,6) + 1 \cdot (4,2,0)) + z(4,2,0)$

$(a,b,c) = (x+2y) \cdot (2,4,6) + (y+z) \cdot (4,2,0)$

D S T Q Q S S

$(a,b,c) \in ger\{(2,4,6),(4,2,0)\}$

Ex: Determine ger A

$ger\,A = \{x(2,4,6) + y(8,10,12) + z(4,2,0) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$(14,16,18) \in ger\,A$

$(7,8,9) \in ger\,A$

$(7,8,9) = \frac{1}{2}\cdot(2,4,6) + \frac{1}{2}\cdot(8,10,12) + \frac{1}{2}(4,2,0)$

a,b,c

$(1,2,3) \in ger\,A$? Sim!

$$\begin{cases} x - 2z = a \\ y + z = \frac{-b+2a}{6} \end{cases}$$

$0 = 2a - 2b + c$

$2b = a + c$

$\rightarrow ger\,A = \{(a,b,c) : a - 2b + c = 0$

$ger\,A = \{a, b, 2b-a) : a,b \in \mathbb{R}$

$3 = 2\cdot 2 - 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 & a \\ 4 & 10 & 2 & b \\ 8 & 12 & 0 & c \end{bmatrix}$$

D S T Q Q S S — 26 • Setembro • 19

Determinantes e Inversas

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y - 10z = 4 \end{cases}$$

$2x = -3 \rightarrow ax = b,\ a \neq 0$

$\frac{1}{2}\,2x = \frac{1}{2}(-3)$ $\qquad \frac{1}{a}ax = \frac{1}{a}b$

$1x = -\frac{3}{2}$ $\qquad a^{-1}ax = a^{-1}b$

$x = -\frac{3}{2}$ $\qquad 1x = a^{-1}b$

$x = a^{-1}b$

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x + 2y - 3z \\ 3x - y + 5z \\ 4x + y - 10z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Se A tem inversa: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$

matriz identidade I: $I \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \left| \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -10 \end{bmatrix} \right|^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

1 0 0 0
0 1 0
0 0 1

$\frac{-23}{56}$ $\frac{-16-7}{56}$ $\frac{1}{7}+\frac{1}{12}$ $\frac{3+1}{12}$ $\frac{1}{7}-\frac{1}{6}$ $\frac{6-7}{42}$ $\frac{-15}{56}$

$\frac{12-7}{84}$ $\frac{25}{42}$ $\frac{2}{12}$ $\frac{-24-7}{84}$ $\frac{-31}{84}$

aula

na outra

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3^{-3} & -1^{-6} & 5^{-4} & 0^{-3} & 1^{-0} & 0^{-0} \\ 4^{-4} & 1^{-8} & -10^{+12} & 0^{-4} & 0^{-0} & 1^{-0} \end{array}\right]$$

A

→ Cálculo da Inversa De A por Escalonamento:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2^{-2} & -3^{-4} & 1^{-6/7} & 0^{-2/7} & 0^{-0} \\ 0 & -7^{+14} & +14 & -3^{+3} & 1^{+1} & 0^{+0} \\ 0 & -7^{+7} & -2^{+4} & -4^{+3} & 0^{+1} & 1^{+0} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1^{-1} & 1/7^{+1/12} & -2/7^{-1/12} & 0^{-1/12} \\ 0 & 1 & 2^{-2} & 3/7^{+1/6} & 1/7^{-1/6} & 0^{-1/6} \\ 0 & 0 & -12 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{84} & \frac{17}{84} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{25}{12} & \frac{1}{42} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \end{array}\right]$$

A^{-1}

det A

$\det A = 7 \times 12 \neq 0$

$\det A = 7 \times 12 \neq 0$

→ Se a forma escalonada reduzida de A não é I, identidade então A^{-1} não existe

Determinante

$L_i \leftrightarrow L_j$: troca o sinal do determinante

$L_i \to c L_i, c \neq 0$: o determinante fica multiplicado por c

$L_i \to L_i + c L_j$: o determinante permanece o mesmo

$x^2+2hx+h^2-x^2$

$\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ $\frac{2hx+h^2}{h}$ $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x)}{h}$ $f(x)=x^2$

$\frac{h(2x+h)}{h}$ $\lim_{h\to 0} 2x+h=2x$

$\frac{f(x^2+h)+f(x^2)}{h}$

01 Outubro 19

Base e dimensão

→ Uma base para um subespaço vetorial $S\subseteq\mathbb{R}^n$ é um conjunto de geradores para S que é linearmente independente.
A dimensão de uma subspaço vetorial $S\subseteq\mathbb{R}^n$ é k se existe uma base de S contendo k vetores.

Questão 2 da V1

$B=\{(1,3,4),(2,-1,1),(-3,5,2)\}$

(a) $(4,2,-2)$ é combinação linear dos vetores em B? Não

(b) Escreva $(4,2,6)$ como combinação linear dos vetores em B $(4,2,6)=\frac{8}{7}v_1+\frac{10}{7}v_2+0v_3$

(c) B é LI ou LD? LD

(d) Determine ger (B) $ger(B)=\{(a,b,a+b): a,b\in\mathbb{R}\}$

(e) Exiba um sistema homogêneo cujo conjunto de soluções seja ger(B) $\{-x-y+z=0$

Resolução:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & (a) & (b) & (c) & (d) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 4 & 0 & a \\ 3 & -1 & 5 & 2 & 2 & 0 & b \\ 4 & 1 & 2 & -2 & 6 & 0 & c \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 3 & -1 & 5 & b \\ 4 & 1 & 2 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -7 & 14 & -3a+b \\ 0 & -7 & 14 & -4a+c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -7 & 14 & -3a+b \\ 0 & 0 & 0 & -a-b+c \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{a+2b}{7} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{3a-b}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -a-b+c \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x+z=\frac{a+2b}{7} \\ y-2z=\frac{3a-b}{7} \\ 0=-a-b+c \end{cases}$$

$f(x) = 4x^2$ $\quad \frac{4(x+h)^2 - 4x^2}{h} = \frac{4(x^2+2hx+h^2) - 4x^2}{h}$ $\quad \frac{4h(2x+h)}{h}$

$\frac{4x^2+8hx+4h^2-4x^2}{h}$

$\lim_{h \to 0} \frac{h(8x+4h)}{h} = 8x$ //

Ex.

$D = \{(1,1,0), (2,2,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

D é LD $\quad (2,2,0) = 2.(1,1,0)$

$E = \{(1,1,0), (2,2,0), (3,3,0)\}$

$ger(E) = ger(D) = ger\{(1,1,0)\} = \{(a,a,0) : a \in \mathbb{R}\}$

Determine a dimensão dos seguintes subespaços

① $S = \{(a, -a, b, -b) : a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

② $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\} \subseteq \mathbb{R}^2$

③ $S = ger(A)$, com $A = \{(0,1,1), (3,2,-1), (1,3,2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

④ $S = \{(a+b, 0, c, 2c, a, a-b, b) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^7$

~ // ~

08/10/19

Coordenadas de um vetor em relação a uma base

Determine a dimensão:

⑤ $S = \{(a, a+b, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(EXERCÍCIO: VERIFICAR QUE S É MESMO UM SUBESPAÇO VETORIAL DE $\mathbb{R}^3$)

PROCURANDO UMA BASE PARA S:

D S T Q Q S S

$$\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \\ b & c \\ a & d \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b^{-b} & b^{-b} \\ b^{-b} & c^{-b} \\ a^{-a} & d^{-a} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & c-b \\ a & d-a \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

$x = y$

$(1,3,2) \in S$

$A = \{(1,3,2)\}$ é LI ger A = ?

$(a,b,c) = x \cdot (1,2,3) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a \\ 3 & b \\ 2 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & b-3a \\ 0 & c-2a \end{bmatrix}$

ger $A \neq S$

ger $A = \{(a,b,c) : -3a+b=0 \text{ e } -2a+c=0\}$

ger $A = \{(a,3a,2a) : a \in \mathbb{R}\} = \{a.(1,3,2) : a \in \mathbb{R}\}$

$(1,6,5) \in S$ $(1,1,0) \in S$

$(1,6,5) \notin$ ger A $(1,1,0) \notin$ ger A

$B = \{(1,3,2),(1,6,5)\}$ é LI

ger B = ?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 3^{-3} & 6^{-3} & b^{-3a} \\ 2^{-2} & 5^{-2} & c^{-2a} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1^{-1} & a^{-\left(\frac{b-3a}{3}\right)} \\ 0 & 3 & b-3a \\ 0 & 3^{-3} & c-2a^{-(b-3a)} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3a-b+3a}{3} \\ 0 & 1 & \frac{b-3a}{3} \\ 0 & 0 & c-2a-b+3a \end{bmatrix}$$

$c+a-b$

ger $B = \{(a,b,c) : a-b+c=0\} = S$

B é LI e ger $B = S$

B é base de S

$\dim S = 2$

$C = \{(1,3,2),(1,1,0)\}$ é LI

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & 1 & b \\ 2 & 0 & c \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -3a+b \\ 0 & 0 & a-b+c \end{bmatrix}$$

ger $C = S$

C é LI e C é base de S

logo $\dim S = 2$

D S T Q Q S S

Será que qualquer conjunto de vetores $B \subseteq S$ que é LI é uma base de S? Não

(...) e tem 2 vetores é uma base de S? Sim, Porquê?

-//-

Coordenadas de um vetor em relação a uma base

$B = \{(1,3,2), (1,6,5)\}$ é base de S e $(1,1,0) \in S$

$(1,1,0) = x\,(1,3,2) + y\,(1,6,5)$

$(1,1,0) = \frac{5}{3}(1,3,2) + \left(\frac{-2}{3}\right)(1,6,5)$ ✓

As coordenadas do vetor $(1,1,0)$ na base B são $\frac{5}{3}$ e $-\frac{2}{3}$

Notação: $[(1,1,0)]_B = \left(\frac{5}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

$C = \{(1,3,2), (1,1,0)\}$ é LI

$(1,1,0) \in S$ C é base de S

$$(1,1,0) = 0 \cdot (1,3,2) + 1 \cdot (1,1,0)$$

$$[(1,1,0)]_C = (0,1)$$

As coordenadas do vetor $(1,1,0)$ na base C são 0 e 1

$D = \{(1,1,0), (0,1,1)\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{a-b+c}$$

$S(0,1,1)$

$1,5)$

$2,1\}$

$[(2,3)]_{can} = (2,3)$

30/30/19

Linear

10 · 10 · 19 — D S T Q Q S S

Isomorfia

- Dado dois espaços vetoriais V e W, dizemos que V é <u>isomorfo</u> a W quando existe uma função $I: V \longrightarrow W$ que é uma bijeção e que preserva as operações de multiplicação por escalar e adição de vetores:
Para todos os vetores $u, v \in V$ e escalares $c \in \mathbb{R}$, temos que

$$I(c.v) = c.I(v) \text{ e } I(u+v) = I(u) + I(v)$$

Exemplo:

$V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(a, a+b, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ são isomorfos.
De fato:

$$I: \mathbb{R}^2 \longrightarrow W$$
$$(x, y) \longmapsto (x, y, y-x) \quad \text{é bijeção}$$

Dado: $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $v = (c, d) \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{R}$, temos:

$$I(k.v) = I(k(a,b)) = I(ka, kb) = (ka, kb, kb - ka) =$$
$$= (ka, kb, k(b-a)) = k(a, b, b-a) = k.I(a,b) = kI(v)$$

$$I(u+v) = I((a,b)+(c,d)) = I(a+c, b+d) = (a+c, b+d,$$
$$(b+d)-(a+c)) = (a+c, b+d, (b-a)+(d-c)) = (a, b, b-a) +$$
$$(c, d, d-c) = I(a,b) + I(c,d) = I(u) + I(v)$$

Problema 1) Escrever o vetor $(1, 1, 0)$ e W. Como combinação linear dos vetores $(1, 3, 2) \in W$ e $(1, 6, 5) \in W$

D S T Q Q S S

Como W e $\mathbb{R}^2$ são isomorfos, vamos resolver o problema em $\mathbb{R}^2$: escrever $(1,1)$ como combinação linear dos vetores $(1,3)$ e $(1,6)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{bmatrix}$$

$$(1,1) = \frac{5}{3}(1,3) + \left(\frac{-2}{3}\right)(1,6)$$

$$(1,1,0) = \frac{5}{3}(1,3,2) + \left(\frac{-2}{3}\right)(1,6,5)$$

Problema 2: Encontrar uma base para W

$\{(1,0),(0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$

$\{(1,0,-1),(0,1,1)\}$ é base de W

Problema 3: Determinar a dimensão de W.

$\dim \mathbb{R}^2 = 2$, logo $\dim W = 2$

Exercício

Mostre que $S = \{(a,-a,b,-b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^2$ e use a função isomórfica encontrada para resolver o item 1 do exercício do dia 01/10/2019

$I : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$

$I(a,b) = (a,-a,b,-b)$

I é uma bijeção e preserva as operações:

D S T Q Q S S

$I(K(a,b)) = I(Ka, Kb) = (Ka, Kb, Kb - Ka) = K(a, -a, b, -b)$
$= K \cdot I(a,b)$

$I[(a,b)+(c,d)] = I(a+c, b+d) = (a+c, -(a+c), b+d, -(b+d)] \rightarrow I(a,b) + I(c,d) = (a, -a, b, -b) + (c, -c, d, -d) = (a+c, -a-c, b+d, -b-d)$

$\dim S = 2$ //

Exercícios 3.4

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & & \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

$a = 4$ $b = -7$

a) $A + (B + C) = (A + B) + C$

$A + \begin{bmatrix} 8 & -5 & -2 \\ 1 & 8 & 6 \\ 7 & -2 & 15 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 10 & -4 & -2 \\ & & \\ & & \end{bmatrix} + C$

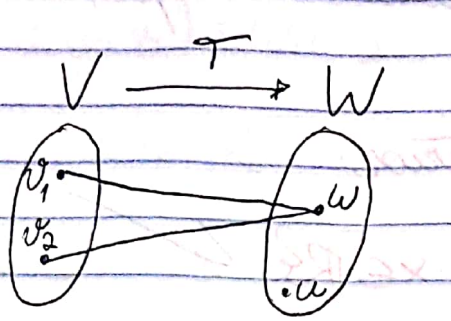
$\begin{bmatrix} 10 & -6 & 1 \\ 4 & 12 & 11 \\ 5 & -1 & 19 \end{bmatrix} =$

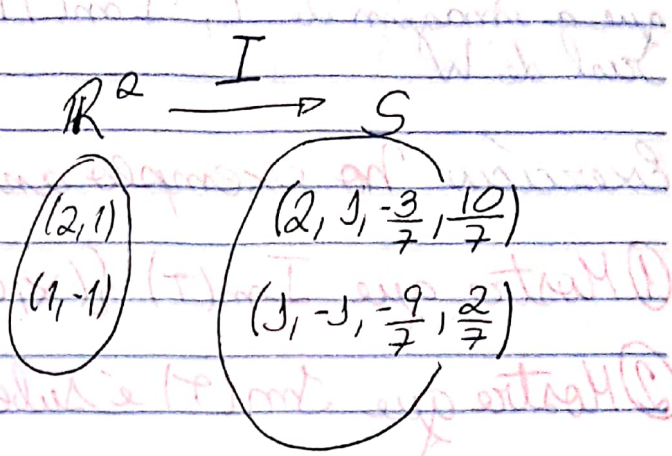
+BINO

$$\begin{array}{r} 82,10 \\ -\ 8,4 \\ \hline 02,6 \end{array}$$

$$3,6 \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2^2 & 1^6 & 0 \\ 2^{-2} & -1^6 & 0 \\ 0 & 20 & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & +5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

D S T Q Q S S





Dados V e W espaços vetoriais e $T: V \to W$ uma função, dizemos que T é uma transformação linear quando para todos $u, v \in V$ e todos $c \in \mathbb{R}$, temos que:

- $T(u+v) = T(u) + T(v)$
- $T(c \cdot u) = c \cdot T(v)$

Ex: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$T(a,b,c) = (a+b, +c, 0)$

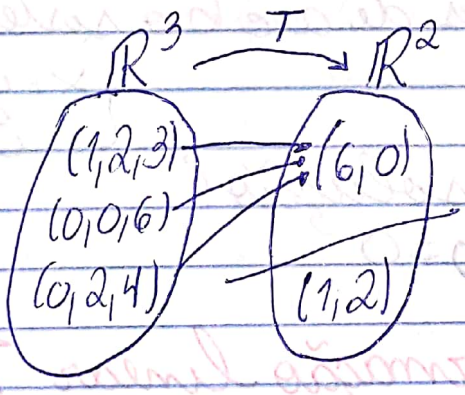
$T((a,b,c)+(d,e,f)) = T(a+d, b+e, c+f)$

$= (a+b+d+e+c+f, 0)$

$T(a,b,c) + T(d,e,f)$

$= (a+b+c, 0) + (d+e+f, 0)$

$= (a+b+c+d+e+f, 0)$



$T(K(a,b,c)) = T(Ka, Kb, Kc)$

$(Ka+Kb+Kc, 0)$

$K \cdot T(a,b,c) = K(a+b+c, 0) = (K(a+b+c), 0)$

D S T Q Q S S

Dada qualquer transformação linear $T: V \to W$, temos que a imagem de T, $Im(T)$, é um subespaço vetorial de W

Exercício No exemplo anterior:

① Mostre que $Im(T) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ ✓

② Mostre que $Im(T)$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$

$Im(T) = ?$ Quais vetores $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ são "alcançados" a partir de algum vetor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$?

ou seja: Para que os vetores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existe algum vetor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x, y, z) = (a, b)?$$

$$\left.\begin{array}{l} T(x, y, z) = (a, b) \\ (x + y + z, 0) = (a, b) \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + y + z = a \\ 0 = b \end{array}$$

ou seja: Para que valores de a e b o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ 0 = b \end{cases}$$

tem solução?

$$b = 0$$

Dada uma transformação linear $T: V \to W$, o conjunto $Nuc(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\}$ dos vetores de V que são associados ao vetor nulo de W por T é chamado núcleo de T

$x+y-z \quad x+$

$x, y, (x+y)$

D S T Q Q S S

$Nuc(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /$

$T(x,y,z) = (0,0)\} \rightarrow (x, y, -(x+y)) = Nuc(T)$

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0)\}$

29/10/19

Matriz de uma transformação linear

Toda transformação linear está associada a uma matriz, e vice-versa

Exemplos:

① $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad T_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$[T(x,y,z)] = A \cdot [(x,y,z)]$

Dado $v \in \mathbb{R}^n$, denotamos por $[v]_B$ a matriz-coluna formada pelas coordenadas de v na base B e por $[v]$ a matriz-coluna formada pelas coordenadas de v na base canônica de $\mathbb{R}^n$

Ex: Encontre as coordenadas de $v = (0,-1,2)$ na base $B = \{(1,2,3), (0,-1,1), (1,0,1)\}$

$(0,-1,2) = x(1,2,3) + y(0,-1,1) + z(1,0,1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2^{-2} - 1^{-0} & 0^{-2} - 1^{-0} & & \\ 3^{-3} & 1^{-0} & 1^{-3} & 2^{-0} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1^{-1} & -2^{-2} & 2^{-1} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1^{-1} & 0^{+\frac{1}{4}} \\ 0 & 1 & 2^{-2} & 1^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{bmatrix}$$

D S T Q Q S S

Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem

Exemplo: Dado $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, calcule o núcleo e a imagem da transformação linear T_A

$\text{Nuc } T_A = \{(x,y,z) : T_A(x,y,z) = (0,0)\}$

$\text{Im } T_A = \{(a,b) : \text{existe } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T_A(x,y,z) = (a,b)\}$

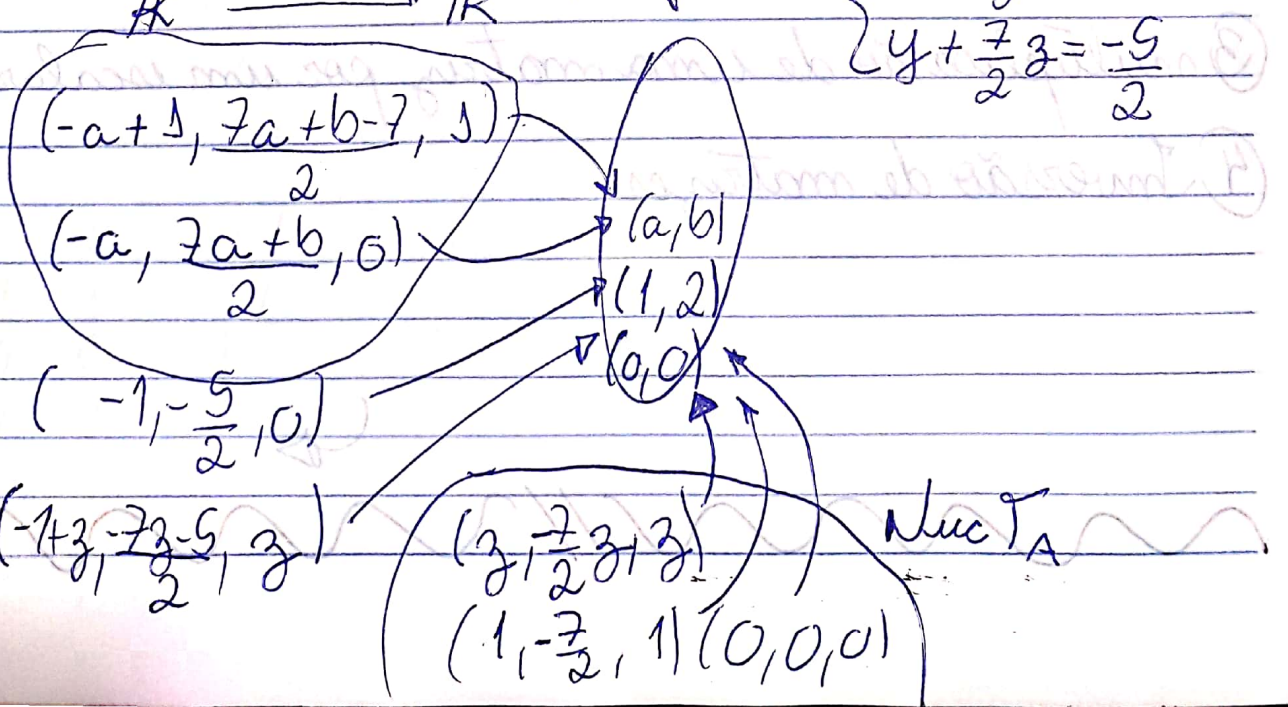
$T_A(x,y,z) = (a,b)$

$(-x+z, 7x+2y) = (a,b)$

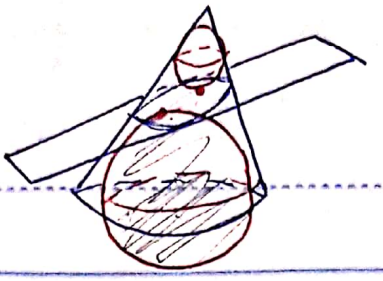
$$\begin{cases} -x+z = a \\ 7x+2y = b \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & a \\ 7 & 2 & 0 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -a \\ 0 & 2 & 7 & 7a+b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -a \\ 0 & 1 & 7/2 & (7a+b)/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x - z = -a \\ y + \frac{7}{2}z = \frac{-7a-b}{2} \end{cases}$$



D S T Q Q S S



$\dim[\text{Im } T] + \dim[\text{Nuc } T_A] = \dim[\text{Dom } \mathbb{R}^3]$

$\text{Im } T_A = \mathbb{R}^2$

$\text{Nuc } T_A = \{(z, -\frac{7}{2}z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \text{ger}\{(1, -\frac{7}{2}, 1)\}$

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\quad T_A \quad} \mathbb{R}^2$$

Teorema

↳ Para toda transformação linear $T: V \to W$, temos que $\dim V = \dim \text{Nuc } T + \dim \text{Im } T$

Exercício Dada $T_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, com $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(1) Encontre uma base para $\text{Im } T_A$

(2) Encontre uma base para $\text{Nuc } T_A$

(3) Encontre uma base para o domínio de T_A

Repita (1), (2) e (3) para:

(a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y) = (-y, 2x, 0)$

(b) $T_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmat

30 · 10 · 19

D S T Q Q S S

Lista 8 Dadas:

(1) $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$T_1(x, y, z) = (-x + y, 7y + 2z)$

(2) $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$T_2(x, y) = (-y, 2x, 0)$

(3) $T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$T_3(x, y) = (x + 2y, -x + y)$

(a) Encontre a matriz da Transformação

$[T_1] = ?$

$$[T_1] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + y \\ 7y + 2z \end{bmatrix}$$

$[T_1]$: 2×3 · 3×1 = 2×1

$$\begin{bmatrix} -1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 7 & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & a \\ 0 & 0 & 3 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{2a}{7} \\ 0 & 0 & 3 & b \end{bmatrix}$$

D S T Q Q S S

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{2a+2b}{7} \\ 0 & 0 & 3 & b \end{bmatrix}$$

$[T_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ Mesmo raciocínio

b) Encontre uma base para o núcleo da transformação

$\text{Nuc } T_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T_3(x,y,z) = (0,0)\} =$
$\{(-\frac{2}{7}z, -\frac{2}{7}z, z) : z \in \mathbb{R}\}$
$B = \{(-2/7, -2/7, 3)\}$ é LI e
$\text{ger}B = \text{Nuc } T_3$, logo
B é base de $\text{Nuc } T_3$

d) (...) imagem (...)

$\text{Im } T_3 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ existe } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T_3(x,y,z) = (a,b)\} = \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 7 & 2 & b \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -a \\ 0 & 3 & 2/7 & b/7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/7 & (7a+b)/7 \\ 0 & 1 & 2/7 & b/7 \end{bmatrix}$$

Sistema possível para qualquer valor de (a,b)

c) Estenda a base do núcleo encontrado a uma base do domínio da transformação

$B' = \{(-2/7, -2/7, 3), (0,0,1)\}$ é LI, pois $(0,0,1) \notin \text{ger}B$

$\text{ger}B' \neq \mathbb{R}^3$

$B'' = \{(-2/7, -2/7, 1), (0,0,3), (0,0,1)\}$ é LI

$(0,3,2) \notin \text{ger}B'$ ou $(1,0,0) \notin \text{ger}B'$

$$\begin{bmatrix} -2/7 & 0 & a \\ -2/7 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & c \\ 0 & 2/7 & a+2/7c \\ 0 & 0 & b+2/7c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & c \\ 0 & 2/7 & a+2/7c \\ 0 & 0 & -a+b \end{bmatrix}$$

$\text{ger}B' = \{(a,a,c) : a,c \in \mathbb{R}\}$

D S T Q Q S S

Lista 5

1) $T_1: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ talque $T_1(x,y,z,w) = (2x-y, y-z-w, 2x+y)$
$T_2: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ " " $T_2(x,y,z,w) = \left(\frac{x+y}{3}, -w, z+w\right)$

a) Base para o $Nuc(T_1)$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & T_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{3\times 4} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 2x-y \\ y-z-w \\ 2x+y \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$T_1 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y \\ y-z-w \\ 2x+y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} x - \frac{z}{2} - \frac{w}{2} = 0 \to x = \frac{z}{2} + \frac{w}{2} \\ y - z - w = 0 \to y = z + w \end{cases}$$

$$Nuc\, T_1 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : T_1(x,y,z,w) = (0,0,0)\} =$$
$$\{(\tfrac{z}{2} + \tfrac{w}{2}, z+w, z, w);\ z \text{ e } w \in \mathbb{R}\}$$

$B = \{(3,6,2,4)\}$ é LI

Logo B é base de $Nuc\, T$

$(a, b, c, d), \in$ $c = -a$

D S T Q Q S S ..... $(a, b, -a)$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & -1 & b \\ -2+2 & 1-1 & 0 & 0 & c+a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c+a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{a+b}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c+a \end{bmatrix}$$

$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{a}{2}$ $+\frac{2b}{2}$

Nuc T_2 → Base

$$[T_2]_{3\times4} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}_{4\times1} = \begin{bmatrix} (x+y)/3 \\ -w \\ z+w \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} x+y=0 \to x=-y \\ w=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Nuc T_2 $\{(-y, y, 0, 0)\}$ $y \in \mathbb{R}$

Base $= \{(-1, 1, 0, 0)\}$ é LI e ger B = Nuc T_2

b) Estenda a base para o núcleo encontrada a uma base para $\mathbb{R}^4$

Nuc T_2 → $B' = \{(3, 6, 2, 4), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ → $B'' = \{(3,6,2,4), (0,0,1,0), (0,1,0,0), (1,0,0,0)\}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & a \\ 6-6 & 0-0 & 1-0 & b-2a \\ 2-2 & 1-0 & 0-0 & c-\frac{2a}{3} \\ 4-4 & 0 & 0 & d-\frac{4a}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a}{3} \\ 0 & 0 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3c-2a}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3d-4a}{3} \end{bmatrix}$$

$b = 2a$

$c = \frac{2a}{3}$

$d = \frac{4a}{3}$

$\frac{a}{3}$ $2a$ $\frac{2a}{3}$ $\frac{4a}{3}$ ∈ ger B

$\left(\frac{a}{3}, 2a, \frac{2a}{3}, \frac{4a}{3}\right)$

$(a, 6a, 2a, 4a)$

$B''' =$

D S T Q Q S S

Nuc $T_2 = \{(-y, y, 0, 0)\}$

$B' = \{(-1, 1, 0, 0), (0, 5, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 5 & 0 & b+a \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 5 & 0 & b+a \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b+a}{5} \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

$$-a, \frac{b+a}{5}, c, 0$$

$B'' = \{(-1, 1, 0, 0), (0, 5, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$

c) base para $Im(T)$

$Im(T_1) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ existe $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tal que $T_1(x, y, z, w) = (a, b, c)\} = \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & -1 & b \\ -2 & 1 & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{a+b}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c+a \end{bmatrix}$$

$(a, b, -a)$, a e $b \in \mathbb{R}$ $\quad (1, 2, -1), (2, 2, -2)$

$Im(T_2)$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & -1 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c+b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -b \end{bmatrix}$$

$(3a, b+c, -b)$ $\quad x + y = 3a$

$z = c + b$

D S T Q Q S S

Lista 7

1) $T_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T_1(x,y) = (2x-7y, 3y)$
$T_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T_2(x,y) = (x+y, -x-y)$
$T_3: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T_3(x,y,z) = (-2y+z, 0, z)$

a) Encontre uma base para Nuc(T)
b) Estenda a base para o núcleo encontrada no item anterior a uma base para dom(T)
c) Mostre que a imagem dos vetores que foram acrescentados à base do núcleo para obter uma base do domínio, no item anterior, formam uma base para Im(T)
d) Estenda a base para a imagem determinada no item anterior a uma base para o contra-domínio da transformação

05/11/2019

Diagonalização de Operadores

T é uma transformação linear que tem domínio igual ao contradomínio

Exercício: Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz (canônica) é $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.
Calcule $T(-1, 2, 3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+6+3 \\ -2+2-6 \\ 1-2+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

RESPOSTA: $T(-1,2,3) = (2,-6,8)$

$T: V \to W$
$v \in V$
$T(v) = ?$
$[T]_{m \times n} \cdot [v]_{n \times 1} = [T(v)]_{m \times 1}$
$\dim V = n$
$\dim W = m$

D S T Q Q S S

Idem para $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule $T(-1,2,3)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+0+0 \\ 0-2+0 \\ 0+0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Qual é a lei do operador cuja matriz canônica é $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$?

Resposta: $T(x,y,z) = (x+3y-z, 2x+y-2z, -x-y+3z)$

Resolução:

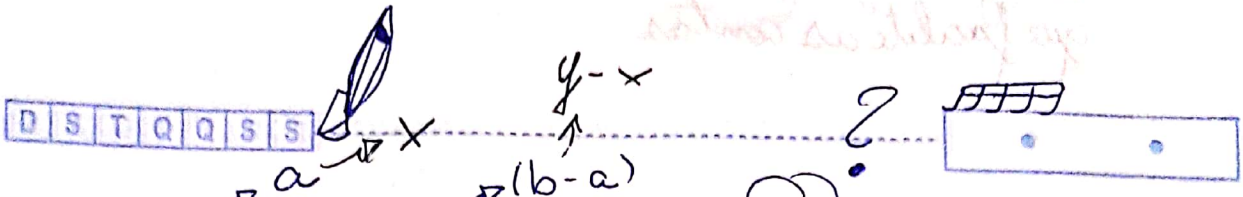
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3y-z \\ 2x+y-2z \\ -x-y+3z \end{bmatrix}$$

Idem para $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $T(x,y,z) = (2x, -y, 3z)$

Vamos calcular a matriz dessa transformação linear em relação a outra base:

$B = \{(-1,2,3), (1,0,0), (0,0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$

D S T Q Q S S



$y - x$

$a \to x$ $\quad$ $(b-a)$

$(a,b) = x\cdot(1,1) + y(0,1)$ $\qquad$ $[T]_B \begin{bmatrix} a \\ b-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+3b \\ a-2b \end{bmatrix}$

$[v]_B = [(a,b)]_B = \begin{bmatrix} a \\ b-a \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} x \\ y-x \end{matrix}$

$T(a,b) = (a+3b, 2a+b) = (a+3b)\cdot(1,1) + (a-2b)(0,1)$

$(1,1) = 1(1,1) + 0(0,1)$
$(0,1) = 0(1,1) + 1(0,1)$

$T(1,1) = (4,3) = 4(1,1) + (-1)(0,1)$
$T(0,1) = (3,1) = 3(1,1) + (-2)(0,1)$

$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $[T]_B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

— // —

Será que dá pra encontrar uma base B' de $\mathbb{R}^2$ tal que $[T]_{B'}$ é uma matriz diagonal

07/11/19

Ex: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$T(x,y) = (x-2y, x+y)$
matriz de T na base canônica:

$T(1,0) = (1,1)$
$T(0,1) = (-2,1)$

$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2y \\ x+y \end{bmatrix}$

Diagonalizar é encontrar outra matriz correspondente que facilite as contas

D S T Q Q S S

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2y \\ x+y \end{bmatrix}$$

$[T(1,0)]$ 1º vetor da base canônica

$[T(0,1)]$ 2º vetor da base canônica

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2y \\ x+y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{[(x,y)]_B} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$B = \{v_1, v_2\}$

$v = x v_1 + y v_2$

$T(v) = x' v_1 + y' v_2$

Outra base de $\mathbb{R}^2$: [07/11/19]

$D = \{(1,0),(1,1)\}$

$T(1,0) = (1,1) = 0(1,0) + 1(1,1)$

$T(1,1) = (-1,2) = -3(1,0) + 2(-1,2)$

$$[T]_D = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdot \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{[v_1]_D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & -3 \\ \cdot & 2 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{[v_2]_D} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\frac{+2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.3}}{2}$ $\frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2}$

D S T Q Q S S

$B = \{v_1, v_2\}$?

$[T]_B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$?

$T(v_1) = a.v_1 + 0.v_2$

$T(v_2) = 0.v_1 + b.v_2$

autovalores

$T(v_1) = a.v_1$

$T(v_2) = b.v_2$

vetores (não nulos) que o operador leva nos seus múltiplos: autovetores

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

autovalor

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} (1-\lambda).x + (-2).y = 0 \\ 1.x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases}$

$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$

$(1-\lambda)(1-\lambda) - 1.(-2) = 0$

$1 - \lambda - \lambda + \lambda^2 + 2 = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$

$\lambda \notin \mathbb{R}$

D S T Q Q S S

Outro exemplo:

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ → 1,0 → 0,1

$T(x,y) = (x+3y, 2x+2y)$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda) - 3(2) = 0$$

$$2 - 3\lambda + \lambda^2 - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$ → equação característica

$\lambda' = 4$

$\lambda'' = -1$

autovalores: 4 e −1

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-4 & 3 \\ 2 & 2-4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ $x - y = 0$

$S_4 = \{(a,a) : a \in \mathbb{R}\}$

autoespaço associado ao autovalor 4

$T(a,a) = (a+3a, 2a+2a)$

$= (4a, 4a)$

$= 4(a,a)$

D S T Q Q S S

$\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$S_{-1} = \left\{ \left(\frac{-3a}{2}, a \right) : a \in \mathbb{R} \right\}$ autoespaço associado ao autovalor -1

$$T\left(\frac{-3a}{2}, a\right) = \left(\frac{-3a}{2} + 3a, \frac{-2 \cdot 3a}{2} + 2a\right)$$

$$\frac{-3a+6a}{2}, \frac{-6a+4a}{2}$$

autoespaço associado ao autovalor -1

$$\left(\frac{3a}{2}, -a\right)$$

$$= (-1)\left(-\frac{3a}{2}, a\right)$$

$B = \{(1,1), (-3, 2)\}$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Diagonalizar um operador é encontrar uma base B tal que $[T]_B$ é diagonal

12/11/19

Espaços Vetoriais

Dizemos que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial (real) quando:

- V é um conjunto não vazio, $+$ é uma operação binária em V, $\cdot$ é uma operação de multiplicação por escalar em V

$(+ : V + V \to V)$ $(\cdot : \mathbb{R} \times V \to V)$

$(3,3)+3(0,1)$

D S T Q Q S S

tais que: para todos $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$:

A1) $(u+v)+w = u+(v+w)$

A2) $u+v = v+u$

A3) existe $\theta \in V$ tal que $v+\theta = v$

A4) existe $-v \in V$ tal que $v+(-v) = \theta$

M1) $(a.b)\cdot v = a\cdot(b.v)$

M2) $(a+b)\cdot v = (a\cdot v)+(b\cdot v)$

M3) $a\cdot(u+v) = (a\cdot u)+(a\cdot v)$

M4) $1\cdot v = v$

Exemplos

(I) $V = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$+$: adição de matrizes usual
$\cdot$: multiplicação por escalar usual

(II) V: funções reais de variável real

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\theta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\theta(x) = 0$

$f+\theta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$+$ usual e $\cdot$ usual

D S T Q Q S S

III V: polinômio de grau máximo 3 com + e · usuais

$p(x) = x^3 + 2x^2$

$\theta(x) = 0$

$ax^3 + bx^2 + cx + d$

Qual a dimensão do espaço vetorial dos polinômios de grau máximo 3?

$B = \{x^3, x^2, x, 1\}$ é base, logo, a dimensão é 4

$x^3 + 2x^2 = 1x^3 + 2x^2 + 0 \cdot x + 0$

$\theta(x) = 0 = \boxed{0}x^3 + \boxed{0}x^2 + \boxed{0}x + \boxed{0}\,1$

$(0,0,0,0) = \square\,(1,0,0,0) + \square\,(0,1,0,0) + \square\,(0,0,1,0) + \square\,(0,0,0,1)$

$\mathbb{R}[x]$: todos os polinômios em x, sem limite para o grau

$B = \{1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots, x^n, \ldots\}$

Ex: $A = \{x^2 + 1,\ x^3 + 2x\}$

$0 = a \cdot (x^2 + 1) + b \cdot (x^3 + 2x)$

$C = \{x^2 + 2,\ -x^2 - 2\}$ é LD

$0 = 1(x^2 + 2) + 1(-x^2 - 2)$

Voltando para os polinômios de grau máximo 3:

S: polinômios de grau máximo 3 que têm raiz 2

$x^2 + 4x - 12 \in S$

$x^3 - 8 \in S$

$x - 2 \in S$

D S T Q Q S S

$p(x) \in S$

$p(x) = (x-2)(ax^2+bx+c)$

$\mathbb{R}^3$	S
$(1,0,0)$	$\longrightarrow$ x^3-2x^2
$(0,1,0)$	$\longrightarrow$ x^2-2x
$(0,0,1)$	$\longrightarrow$ $x-2$

$B = \{x^3-2x^2, x^2-2x, x-2\}$ é base de S

Produto Interno

$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

Em $\mathbb{R}^3$:

$$(x_1,y_1,z_1)\cdot(x_2,y_2,z_2) = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

$$P(x) = a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$
$$q(x) = b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$$

$$p(x).q(x) = a_3b_3+a_2b_2+a_1b_1+a_0b_0$$

$$\mathbb{E}_x\langle (x^3-2x^2).(x^2-2x)\rangle = \langle x^3-2x^2+0x+0,\ 0x^3+x^2-2x+0\rangle$$
$$1.0+(-2).1+0(-2)+0-0 = -2$$

$$\mathbb{E}_x^2\langle x^3, x^2\rangle = \langle x^3+0x^2+0x+0,\ 0x^3+x^2+0x+0\rangle$$
$$0 //$$

Os polinômios $p(x)=x^3$ e $q(x)=x^2$ são ortogonais

//

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

D S T Q Q S S

6. $P = \{ax+b : a, b \in \mathbb{R}\}$

$p(x) = a_1 x + b_1$ e $q(x) = a_2 x + b_2$

$\langle p, q \rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2$

Considere também $p(x) = 2x - 2$ e $q(x) = x + 1$

14/11/19

Exercício 8

$0 \ -1$
$2 \ 0$

$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T_2(x, y) = (-y, 2x, 0)$

Exercício ①

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2x + y, x + y)$

Encontrar uma base para o núcleo da transformação

① $Nuc(T) = \{v \in V : T(v) = \theta_W\}$

$T : V \to W$

$Nuc(T_1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{T(x, y)}_{(2x+y,\ x+y)} = (0, 0)\}$

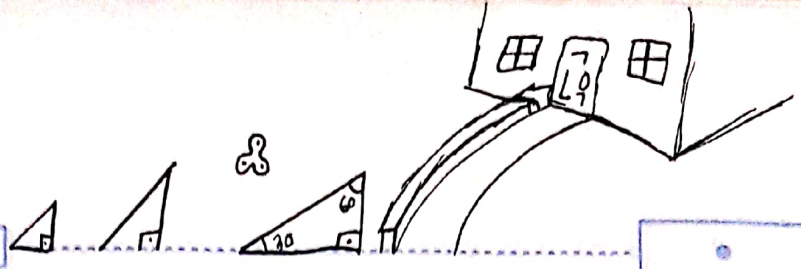
$Nuc(T_1) = \{(0, 0)\}$ base para $\{(0,0)\}$: $\emptyset$, ger $\emptyset = \{(0, 0)\}$

⑧ - $Nuc(T_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{T(x, y) = (0, 0, 0)}_{(-y,\ 2x,\ 0) = (0,0,0)}\}$

$Nuc(T_2) = \{(0, 0, 0)\}$

base: $\emptyset$

$\emptyset$ é LI e ger$(\emptyset) = \{(0, 0, 0)\}$



D S T Q Q S S

8- $T_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T_2(x,y) = (-y, 2x, 0)$

$Im(T_2) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : T_2(x,y) = (a,b,c), \text{ para algum } (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ $\quad (-y+2x+0)$

$\begin{cases} -y = a \\ 2x = b \\ 0 = c \end{cases}$ quando esse sistema tem solução? (para que valores de a, b e c)

$\begin{matrix} 1 & 0 & \frac{b}{2} \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & c \end{matrix}$

$\begin{bmatrix} -1 & a \\ 2 & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} +1 & -a \\ 0 & 2a+b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ $\quad Im(T_2) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : 2a+b=0 \text{ e } c=0\}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & -1 & a \\ 2 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & b \\ 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ $\quad Im(T_2) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c=0\}$

$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad Nuc(T_2) = \{(0,0)\}$

$\dim Dom(T_2) = \dim Nuc(T_2) + \dim Im(T_2)$

$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \{(0,0)\} + \dim = \{(a,b,0) : a,b \in \mathbb{R}\}$

$2 = 0 + 2$

base para $Im(T_2) = \{(1,0,0),(0,1,0)\} = B$

Ex 3: $T: S_{2\times 2}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}) \longrightarrow D_{3\times 3}^{\mathbb{R}^3}(\mathbb{R})$

$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2b+c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$